



# Uczenie maszynowe w animacjach

## Wykład nr 3

### Elementy formalizmu matematycznego i fizyki zjawisk

Szymon Datko

szymon.datko@pwr.edu.pl

Wydział Informatyki i Telekomunikacji,  
Politechnika Wroclawska

semestr letni 2021/2022

# Wektory

- ▶ Obiekty matematyczne, charakteryzowane przez dwie wartości:
  - **kierunek** (wraz ze zwrotem),
  - **moduł** (długość / wielkość).
  
- ▶ Typowa notacja:  $\vec{v}$  lub  $\mathbf{v}$ ; najważniejsze informacje:
  - najczęściej zapisywane są jako tablice liczb,
  - elementy wektora są nazywane **składowymi**,
  - wektor **jednostkowy** / znormalizowany – gdy długość równa 1,
    - najczęściej stosowany po prostu do wskazania kierunku.
  
- ▶ Podstawowe operacje:
  - dodawanie:  $(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ ;
  - skalowanie:  $a \cdot (b_1, b_2, \dots) = (a \cdot b_1, a \cdot b_2, \dots)$ .

# Własności wektorów

- ▶ Równość:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots$$

- ▶ Przemienność i łączność:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

- ▶ Moduł / norma / długość:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots}$$

# Typowe operacje na wektorach

- ▶ Iloczyn skalarny:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots$$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \alpha$$

- ▶ Iloczyn wektorowy:

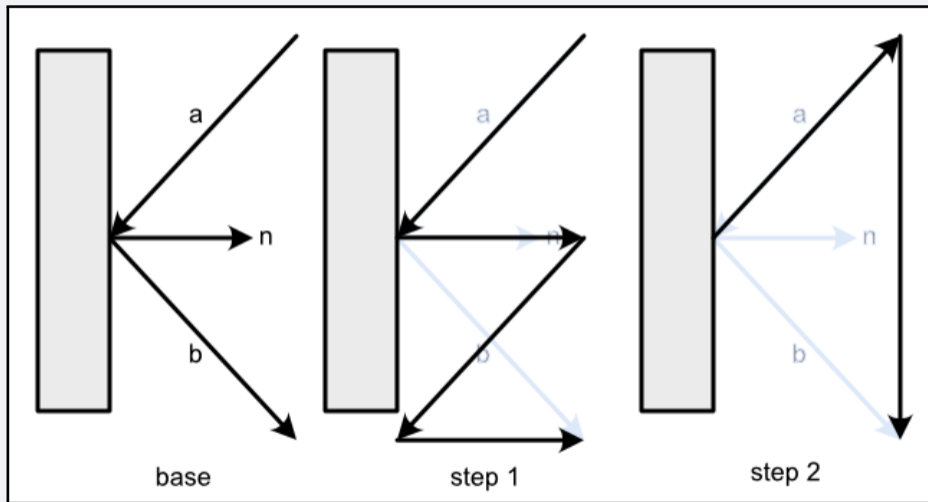
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \theta \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

$$\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1, \hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{a}, \hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{b}$$

- ▶ Odbicie względem wektora normalnego:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - 2 \cdot (\mathbf{a} \circ \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

## Wyprowadzenie wzoru na wektor odbity



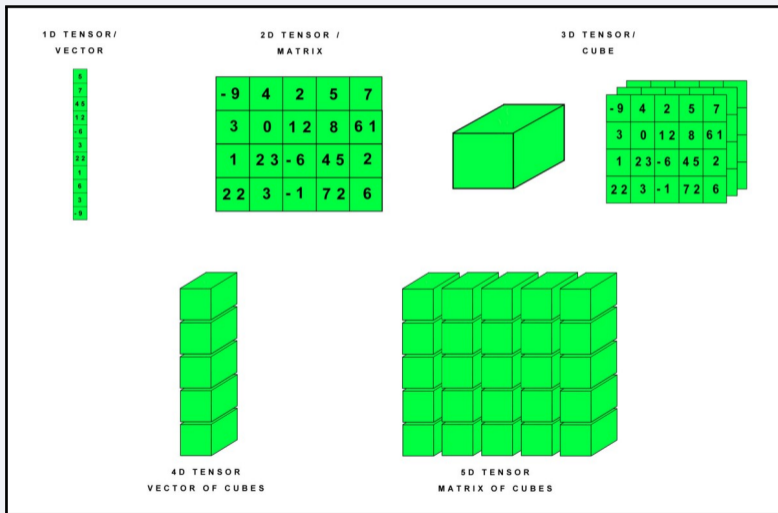
# Macierze

- ▶ Obiekty matematyczne, 2-wymiarowe tablice liczb.
  - ▶ Dwa indeksy każdego elementu: nr wiersza i nr kolumny.
- ▶ Podstawowe operacje:
  - ▶ dodawanie:  $(a_{11}, a_{12}, \dots) + (b_{11}, b_{12}, \dots) = (a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, \dots)$ ;
  - ▶ skalowanie:  $a \cdot (b_{11}, b_{12}, \dots) = (a \cdot b_{11}, a \cdot b_{12}, \dots)$ ;
  - ▶ mnożenie: (iloczyn Cauchy'ego)  $\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}$ .
- ▶ Najważniejsze własności:
  - ▶ łączność,
  - ▶ **nieprzemienność**.
- ▶ Wektor można uznać jako macierz o wymiarze  $1 \times n$  lub  $n \times 1$ ...
  - ▶ Mówimy wtedy o wektorze wierszowym lub kolumnowym.
  - ▶ Ma to znaczenie dla operacji mnożenia macierzy i wektora.

# Tensory

Uogólnienie pojęcia wektora.

Skalar to inaczej tensor rzędu 0, itd.



# Podstawowe rodzaje przekształceń

- ▶ Afiniczne<sup>1</sup>:
  - ▶ identyczność,
  - ▶ skalowanie,
  - ▶ translacja,
  - ▶ obrót.
  
- ▶ Nieafiniczne:
  - ▶ rzutowanie ortogonalne,
  - ▶ rzutowanie perspektywiczne.

---

<sup>1</sup> czyli takie, które zachowują (w ogólności) proporcje odległości między punktami na tej samej linii przed i po wykonaniu transformacji, ale nie muszą zachować położenia punktu początkowego; może być zareprezentowane jako iloczyn macierzy  $n \times n$  i wektora  $n \times 1$  z dodatkowym przesunięciem o wektor;  $n$  - wymiar przestrzeni.



# Współrzędne jednorodne

- ▶ Podstawowym pojęciem w grafice komputerowej **wierzchołek**. Jest to punkt z określonym położeniem w przestrzeni 3D.
- ▶ W **reprezentacji jednorodnej** do zapisu położenia stosuje się wektory o liczbie elementów większej niż wymiar przestrzeni,

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \leftrightarrow \left( \frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w} \right).$$

- ▶ Typowo ostatnia składowa  $w$  dla położenia ma wartość 1.
- ▶ Zastosowanie takiej reprezentacji pozwala na bardzo łatwą realizację podstawowych przekształceń geometrycznych.

# Macierz przekształceń – identyczność

Macierz **I** jest także nazywana macierzą jednostkową.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Z reguły jest to domyślna macierz, od której rozpoczynamy dalsze obliczenia.

► Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1.0 \end{bmatrix}$$

## Macierz przekształceń – skalowanie

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & S_y & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & S_z & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Gdy  $S_x = S_y = S_z$  to mówimy o skalowaniu jednorodnym.
- ▶ Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & S_y & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & S_z & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \cdot x & S_y \cdot y & S_z \cdot z & 1.0 \end{bmatrix}$$

## Macierz przekształceń – translacja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & T_x \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & T_y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & T_z \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Reprezentacja jednorodna punktu pozwala wyrazić operację przez macierz.
- ▶ Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & T_x \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & T_y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & T_z \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x & y + T_y & z + T_z & 1.0 \end{bmatrix}$$

## Macierz przekształceń – obrót wokół osi x

$$\mathbf{R}_{x,\gamma} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0.0 \\ 0.0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Współrzędne w osi wokół której następuje obrót nie ulegają zmianie!
- ▶ Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0.0 \\ 0.0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -z & y & 1.0 \end{bmatrix}$$

## Macierz przekształceń – obrót wokół osi y i z

$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0.0 & \sin \theta & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -\sin \theta & 0.0 & \cos \theta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0.0 & 0.0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

### Uwaga!

W zależności od przyjętej definicji układu współrzędnych i kierunku obrotu, wyrazy w przedstawionej macierzy mogą się różnić co do znaku  $+/-$ .

## Macierz przekształceń – obrót wokół osi x, y i z

Dokonyjemy kolejno obrotów wokół osi x, y i z o kąty  $\gamma$ ,  $\theta$  i  $\phi$ .

Należy przemnożyć w odwrotnej kolejności wcześniej macierze.

$$\mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \gamma \sin \phi + \sin \gamma \sin \theta \cos \phi & \sin \gamma \sin \phi - \cos \gamma \sin \theta \cos \phi & 0.0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \gamma \cos \phi - \sin \gamma \sin \theta \sin \phi & \sin \gamma \cos \phi + \cos \gamma \sin \theta \sin \phi & 0.0 \\ \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma \cos \theta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

### Uwaga!

Kolejność wykonywania obrotów ma znaczenie!

# Macierz przekształceń – obrót wokół wektora

Obrót o kąt skierowany  $\phi$  (reguła prawej dłoni) wokół wektora  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{v}^T = [v_x \quad v_y \quad v_z \quad 0.0], \quad \|\mathbf{v}\| = 1$$
$$\begin{bmatrix} v_x^2(1 - \cos \phi) + \cos \phi & v_x v_y(1 - \cos \phi) - v_z \sin \phi & v_x v_z(1 - \cos \phi) + v_y \sin \phi & 0.0 \\ v_x v_y(1 - \cos \phi) + v_z \sin \phi & v_y^2(1 - \cos \phi) + \cos \phi & v_y v_z(1 - \cos \phi) - v_x \sin \phi & 0.0 \\ v_x v_z(1 - \cos \phi) - v_y \sin \phi & v_y v_z(1 - \cos \phi) + v_x \sin \phi & v_z^2(1 - \cos \phi) + \cos \phi & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Lewa górna część (3x3) powyższej macierzy może zostać wyrażona w prostszy sposób:

$$\mathbf{v} \mathbf{v}^T (1 - \cos \phi) + \mathbf{I} \cos \phi + \begin{bmatrix} 0.0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0.0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0.0 \end{bmatrix} \sin \phi$$

## Uwaga!

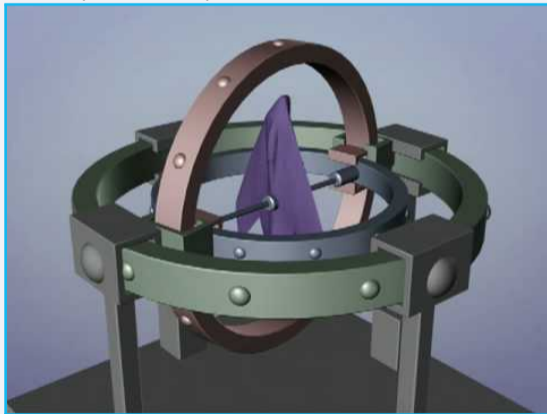
Wektor  $\mathbf{v}$  określa oś obrotu, przechodzącą przez początek układu współrzędnych!



# Problem z macierzami obrotu

- ▶ W układzie z ustalonymi osiami występuje tak zwana **blokada przegubu**.
- ▶ Rozwiązanie: twierdzenie Eulera o obrotach (reprezentacja przy pomocy kwaternionów).

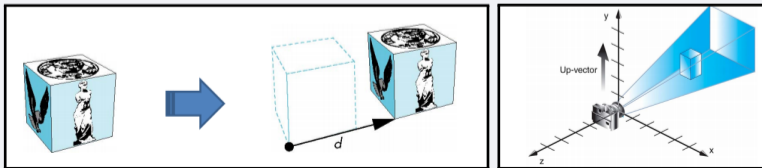
"Euler (gimbal lock) Explained" – GuerrillaCG, 2009.



<https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno>

# Kamera jest kłamstwem

- ▶ Przedstawione transformacje pozwalają nam na skomponowanie sceny.
  - Można dzięki nim określić rozmieszczenie wszystkich obiektów.
  - Pozostaje określić na co na tej scenie patrzymy – opisać kamerę...
- ▶ W kontekście karty graficznej nie istnieje coś takiego jak **kamera**!
- ▶ Karta graficzna renderuje zawsze dla tego samego fragmentu przestrzeni.
  - Obszar rysowania obejmuje zakres  $[-1.0; 1.0]$  dla każdej z osi.
  - Jest to tak zwana **bryła widzenia**.
- ▶ Abstrakcja z kamerą na scenie stanowi intuicyjnie wygodny dla nas opis...
  - Wykorzystujemy **względność ruchu**, aby tę reprezentację osiągnąć!



# Macierz patrzenia

Chcemy opisać położenie kamery jednoznacznie w przestrzeni:

- ▶ współrzędne położenia kamery  $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$ ,
- ▶ współrzędne punktu zainteresowania  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ,
- ▶ wektor orientacji, wskazujący górę dla kamery  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ .

Kierunek patrzenia można opisać wektorem  $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{e}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{e}\|}$ ;

$$\mathbf{s} = (\mathbf{f} \times \mathbf{u}).$$

Rzut wektora  $\mathbf{u}$  na płaszczyznę prostopadłą do  $\mathbf{f}$  to  $\mathbf{u}' = (\mathbf{f} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{f}$ .

$$\mathbf{V}_{\text{lookAt}} = \begin{bmatrix} s_x & u'_x & f_x & -e_x \\ s_y & u'_y & f_y & -e_y \\ s_z & u'_z & f_z & -e_z \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

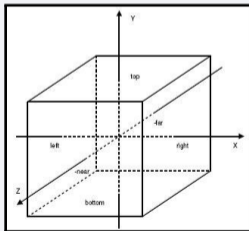
Oznaczenia:  $s$  – side vector,  $u$  – up vector,  $f$  – forward vector,  $e$  – eye position.

**Efektywnie:** przekształcamy cały świat przeciwnie do ruchu, jaki wykonałaby kamera.

# Macierz rzutowania prostopadłego

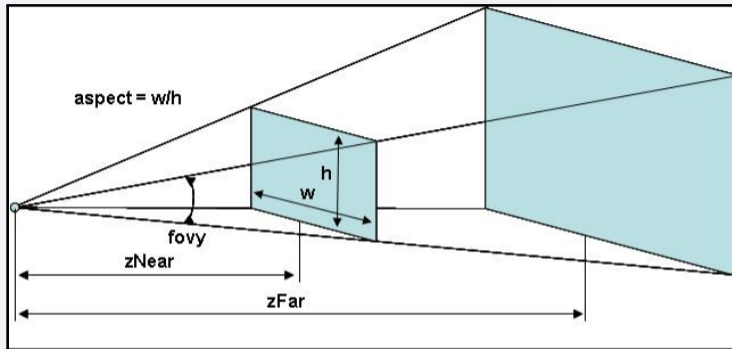
$$\mathbf{P}_{\text{ortho}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\text{right} - \text{left}} & 0.0 & 0.0 & -\frac{\text{right} + \text{left}}{\text{right} - \text{left}} \\ 0.0 & \frac{2}{\text{top} - \text{bottom}} & 0.0 & -\frac{\text{top} + \text{bottom}}{\text{top} - \text{bottom}} \\ 0.0 & 0.0 & -\frac{2}{\text{far} - \text{near}} & -\frac{\text{far} + \text{near}}{\text{far} - \text{near}} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Macierz nie opisuje wprost przekształcenia nieafinicznego, a bryłę widzenia!



**Efektywnie:** skalujemy fragment świata, który chcemy zobaczyć, do obszaru rysowania.

# Rzutowanie perspektywiczne



Obszar pomiędzy  $zNear$  a  $zFar$  to bryła widzenia.

Przy rzutowaniu perspektywicznym to tak zwany stożek ścięty (ang. *frustum*).

Pozwala nam zaobserwować głębię (odległość od kamery) na obrazie.

Obiekty bliżej płaszczyzny bliskiej są mniej zmniejszone, niż te przy p. dalekiej.

## Macierz rzutowania perspektywicznego

$$\mathbf{P}_{\text{frustum}} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \text{near}}{\text{right} - \text{left}} & 0.0 & \frac{\text{right} + \text{left}}{\text{right} - \text{left}} & 0.0 \\ 0.0 & \frac{2 \cdot \text{near}}{\text{top} - \text{bottom}} & \frac{\text{top} + \text{bottom}}{\text{top} - \text{bottom}} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -\frac{\text{far} + \text{near}}{\text{far} - \text{near}} & -\frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{far} - \text{near}} \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

W szczególności to przekształcenie może być zadane przez:

- ▶ pole widzenia jako kąt  $fovy$ ,
- ▶ współczynnik proporcji obrazu  $aspect = \frac{width}{height}$ ,
- ▶ odległość bliższej  $near$  i dalszej  $far$  przestrzeni przycięcia;
- ▶ wtedy obliczamy:
  - ▶  $top = near * \text{tg}(fovy \cdot \frac{\pi}{360})$ ,
  - ▶  $bottom = -top$ ,
  - ▶  $right = top * aspect$ ,
  - ▶  $left = -right$ .

# Składanie przekształceń

- ▶ Chcąc przekształcić wektor, mnożymy go lewostronnie przez macierz.
- ▶ Wynikiem takiej operacji jest nowy wektor, który też można przekształcić.
- ▶ Macierze można wymnożyć najpierw – często przyspiesza to obliczenia.
- ▶ Mnożenie macierzy nie jest przemienne, a więc **kolejność ma znaczenie**.

$$\vec{p}_{\text{wynik}} = \dots \cdot \mathbf{M}_{\text{czwarta}} \cdot \mathbf{M}_{\text{trzecia}} \cdot \mathbf{M}_{\text{druga}} \cdot \mathbf{M}_{\text{pierwsza}} \cdot \vec{p}_{\text{wierzchołka}}$$

$$\vec{p}_{\text{wynik}} = \dots \cdot (\mathbf{M}_{\text{czwarta}} \cdot (\mathbf{M}_{\text{trzecia}} \cdot (\mathbf{M}_{\text{druga}} \cdot (\mathbf{M}_{\text{pierwsza}} \cdot \vec{p}_{\text{wierzchołka}}))))$$

$$\vec{p}_{\text{wynik}} = (\dots \cdot \mathbf{M}_{\text{czwarta}} \cdot \mathbf{M}_{\text{trzecia}} \cdot \mathbf{M}_{\text{druga}} \cdot \mathbf{M}_{\text{pierwsza}}) \cdot \vec{p}_{\text{wierzchołka}}$$

# Układ Model-View-Projection

Zazwyczaj ostateczne położenie każdego wierzchołka na scenie jest opisane przez serię trzech kolejnych przekształceń, czyli przez przemnożenie jego współrzędnych wejściowych przez iloczyn  $P \cdot V \cdot M$ , gdzie:

- macierz **M** – przekształcenie modelu:
  - ▶ opisuje ułożenie modelowanego obiektu na scenie;
- macierz **V** – przekształcenie patrzenia:
  - ▶ definiuje położenie hipotetycznej kamery w przestrzeni;
- macierz **P** – przekształcenie rzutowania:
  - ▶ określa jaki zakres (fragment) przestrzeni będzie rysowany;

Taki układ wygodnie reprezentuje niezależnie przemieszczenie obiektu i kamery!



## Ruch w sensie fizycznym

- ▶ Położenie obiektu w chwili  $t$  opisujemy jako funkcję  $\vec{r}(t)$ :
  - wektor  $\vec{r}$  określa współrzędne przestrzenne obiektu,
  - $t$  jest parametrem funkcji, intuicyjnie może być to czas,
  - parametrów funkcji może być oczywiście więcej.
  
- ▶ Ruch to zmiana położenia w czasie:
  - = zmiana  $t$ ,
  - = zmiana  $\vec{r}(t)$ ,
  - = przemieszczenie obiektu,
  - = czyli ruch – to co nas interesuje.

# Prędkość i przyspieszenie

## ▶ Prędkość:

- określa szybkość zmian położenia,  $\sim \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$ ,  $t_2 - t_1 = \Delta t$ ,
- ogółem  $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ .

## ▶ Przyspieszenie:

- opisuje jak zmienia się prędkość,
- z definicji  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ .

## ▶ Rzadziej rozważane wielkości:

- zryw,  $\vec{z}(t) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{d^3\vec{r}(t)}{dt^3}$ ,
- udar,  $\vec{u}(t) = \frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{a}(t)}{dt^2} = \frac{d^3\vec{V}(t)}{dt^3} = \frac{d^4\vec{r}(t)}{dt^4}$ .

# Równanie ruchu

- ▶ Ogólnie mówimy o dowolnym wyrażeniu, definiującym  $\vec{r}(t)$ .
- ▶ Nie musi ono odpowiadać czemuś rzeczywistemu.
- ▶ W przypadku symulacji, interesuje nas fizyczna podstawa:
  - punkt wyjścia to *Zasady Dynamiki Newtona*,
  - konkretnie  $\vec{F}_{II} = m \cdot \vec{a}(t)$ ,
  - siła  $\vec{F}_{II}$  oraz warunki początkowe są tym, co determinuje ruch,
  - w funkcji  $\vec{a}(t)$  ukryta jest (druga pochodna) zależność  $\vec{r}(t)$ .
- ▶ Ostatecznie, nasze równanie ruchu:  $\vec{F}_{II} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ .

## Przykład – ruch w polu grawitacyjnym

- ▶ Rozważmy uproszczony, jednowymiarowy spadek swobodny.
- ▶ Jedyłą siłą w układzie jest siła ciężaru.
- ▶ Ta siła steruje ruchem, czyli  $F_{II} = F_{ciężaru}$ .
- ▶ Stąd równanie ruchu  $m \cdot \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = m \cdot g$ .
- ▶ W uproszczeniu  $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = g$ .
- ▶ Uzyskujemy tak zwane **równanie różniczkowe zwyczajne**.

## Przykład – rozwiązywanie równania ruchu (1/3)

▶ Mamy równanie różniczkowe rzędu drugiego  $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = g$ .

▶ Zapisujemy je jako układ równań rzędu pierwszego:

– wiemy, że  $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \frac{dV(t)}{dt}$  oraz  $\frac{dr(t)}{dt} = V(t)$ ,

– stąd otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = g \\ \frac{dr(t)}{dt} = V(t) \end{cases} .$$

▶ Następnie dokonujemy przemnożenia wyrażeń przez czynnik  $dt$

$$\begin{cases} dV(t) = g dt \\ dr(t) = V(t) dt \end{cases} .$$

## Przykład – rozwiązywanie równania ruchu (2/3)

- ▶ Dzięki temu można scałkować wszystkie równania obustronnie

$$\begin{cases} \int dV(t) = \int g \, dt \\ \int dr(t) = \int V(t) \, dt \end{cases} .$$

- ▶ Lewa część tych równań ma trywialne rozwiązanie w postaci

$$\int dx = x + C .$$

- ▶ Więc ostatecznie otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} V(t) = \int g \, dt \\ r(t) = \int V(t) \, dt \end{cases} .$$

## Przykład – rozwiązywanie równania ruchu (3/3)

- ▶ Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$V(t) = \int g \, dt = g \cdot \int dt = g \cdot t + V_0 .$$

- ▶ Rozwiązujemy drugie równanie, wykorzystując uzyskany wynik:

$$\begin{aligned} r(t) &= \int V(t) \, dt = \int (g \cdot t + V_0) \, dt = \int g \cdot t \, dt + \int V_0 \, dt \\ &= g \cdot \int t \, dt + V_0 \int dt = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot t + r_0 . \end{aligned}$$

- ▶ Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} V(t) = g \cdot t + V_0 \\ r(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot t + r_0 \end{cases} .$$

## Gdzie się podziały stałe całkowania?!

- ▶ Mamy do czynienia z równaniami w postaci ogólnej:

$$\int df(x) = \int dg(y)$$

$$f(x) + C_x = g(y) + C_y$$

$$f(x) = g(y) + (C_y - C_x)$$

$$f(x) = g(y) + C_0 .$$

- ▶ Jest tu więc zastosowany prosty zabieg matematyczny.
- ▶ Wartości  $V_0$  i  $r_0$  stanowią dodatkowe parametry układu:
  - $V_0$  oznacza **prędkość początkową** obiektu,
  - $r_0$  określa **położenie początkowe** obiektu.



## Co nam to daje?

- ▶ Wartości funkcji  $r(t)$  dla kolejnych wartości parametru  $t$ :
  - opisują położenie ciała w kolejnych chwilach,
  - wartość  $t$  może stanowić moment w animacji,
  - wynik  $r(t)$  to wartość translacji obiektu w układzie świata.
- ▶ Rozwiązanie można uogólnić na przypadek wielowymiarowy,
  - wystarczy, że wszystkie parametry (poza  $t$ ) będą wektorami,
  - tj.  $g \rightarrow \vec{g}$ ,  $V_0 \rightarrow \vec{V}_0$ ,  $r_0 \rightarrow \vec{r}_0$ ,  $V(t) \rightarrow \vec{V}(t)$ ,  $r(t) \rightarrow \vec{r}(t)$ .
- ▶ Wartości parametrów początkowych określają charakter ruchu.
- ▶ Warto przy tym określić kryterium zakończenia obliczeń.

## Nie zawsze bywa tak pięknie...

- ▶ Rozważany przykład miał eleganckie rozwiązanie analityczne.
- ▶ Siły sterujące ruchem mogą mieć skomplikowane zależności.
- ▶ W szczególności – może nie istnieć rozwiązanie analityczne.
- ▶ W takim wypadku konieczne jest użycie metod numerycznych.
- ▶ Patrz przykład: rzut z uwzględnieniem oporu powietrza.

## Rzut z uwzględnieniem oporu powietrza

- Rozważmy zagadnienie rzutu ukośnego w ośrodku, np. strzał z armaty.
- Opisanie ruchu ciała z uwzględnieniem oporu powietrza nie jest proste.
- Równanie ruchu w przypadku 2-wymiarowym można opisać jako układ

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -F_{\text{powietrza}}, \quad m \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -F_{\text{grawitacji}} - F_{\text{powietrza}}.$$

- Znak **minus** mówi o tym, że obie siły są skierowane domyślnie przeciwnie do kierunku ruchu; siła grawitacji działa wyłącznie w kierunku  $y(t)$ ,

$$F_{\text{grawitacji}} = m \cdot g, \quad F_{\text{powietrza}} = k \cdot V(t).$$

- Ostatecznie całość można opisać jako układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dV_x(t)}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot V_x(t), \\ \frac{dx(t)}{dt} = V_x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dV_y(t)}{dt} = -g - \frac{k}{m} \cdot V_y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = V_y(t). \end{cases}$$

# Metoda Eulera rozwiązywania równań różniczkowych

- Przypomnienie – najważniejsze informacje na temat równań:
  - ▶ rozwiązaniem klasycznego równania jest liczba, np.  $x = 7$ ,
  - ▶ rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja, np.  $f(t) = 3t^2$ .
- Czasem odnalezienie postaci analitycznej funkcji może nie być trywialne.
- Formalna definicja pochodnej funkcji w punkcie  $t$  to

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt},$$

stąd, przekształcając wzór, możemy wyznaczyć wartość w punkcie  $t + dt$

$$f(t + dt) = f(t) + \frac{df(t)}{dt} \cdot dt.$$

- Jeśli określone zostaną parametry początkowe  $t_0$  i  $f(t_0)$ , krok  $dt$  oraz postać pochodnej  $\frac{df(t)}{dt}$  to możliwe jest wyznaczenie kolejnych wartości funkcji  $f(t)$ , a więc – numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego.

## Rzut z uwzględnieniem oporu powietrza – rozwiązanie

- Wykorzystujemy Metodę Eulera do obliczenia  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$ ,  $x(t)$  i  $y(t)$ ,

$$f(t + dt) = f(t) + \frac{df(t)}{dt} \cdot dt;$$

$$\begin{cases} \frac{dV_x(t)}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot V_x(t), \\ \frac{dx(t)}{dt} = V_x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dV_y(t)}{dt} = -g - \frac{k}{m} \cdot V_y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = V_y(t). \end{cases}$$

- W pętli należy wyznaczać kolejne wartości położeń i prędkości:

$$V_x(t + \Delta t) = V_x(t) - \frac{k}{m} \cdot V_x(t) \cdot \Delta t,$$

$$V_y(t + \Delta t) = V_y(t) - g \cdot \Delta t - \frac{k}{m} \cdot V_y(t) \cdot \Delta t,$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + V_x(t) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot V_x(t) \cdot \Delta t^2,$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + V_y(t) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot V_y(t) \cdot \Delta t^2.$$

- Danymi początkowymi i parametrami w tym modelu są wielkości:

▶  $x(t = 0)$ ,  $y(t = 0)$ ,  $V_x(t = 0)$ ,  $V_y(t = 0)$ ,  $\Delta t$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $m$ .

## Siła ciężaru i grawitacji

- ▶ W najprostszej, najczęściej spotykanej postaci, siła ciężaru to

$$\vec{F}_C = m \cdot \vec{g} .$$

- ▶ Wektor skierowany w kierunku podłoża.
- ▶ Powoduje spadanie i przewracanie się obiektów.
- ▶  $\vec{g}$  to przyspieszenie grawitacyjne – skąd się bierze? → Grawitacja.
- ▶ Siła grawitacji opisuje oddziaływanie pomiędzy **masywnymi** obiektami,
- ▶ Po powiązaniu z II zasadą dynamiki Newtona, uzyskujemy

$$m \cdot \vec{a} = G \cdot \frac{M \cdot m}{\|\vec{R}\|^2} ,$$

$$\vec{a} = G \cdot \frac{M}{\|\vec{R}\|^2} .$$

- ▶ Przy założeniu promienia i masy ziemi →  $\vec{a} = \vec{g} \approx 9.81$ .

# Tarcie










- ▶ Opór ruchu, pojawiający się na styku dwóch powierzchni / ośrodków.
  - Wyróżnia się jego dwa rodzaje:
    - ▶ statyczne,  $\vec{F}_{Ts} = -\mu_s \cdot \vec{F}_N$ ,
    - ▶ kinetyczne,  $\vec{F}_{Tk} = -\mu_k \cdot \vec{F}_N$ .
  - Oba rodzaje nigdy nie występują razem – albo jeden, albo drugi.
  - Ogółem zawsze zachodzi zależność  $\mu_k < \mu_s$ ,
    - wartości te są wyznaczone eksperymentalnie.
  - Reprezentowany przez wektor siły zwrócony przeciwnie do kierunku ruchu.

# Opór powietrza

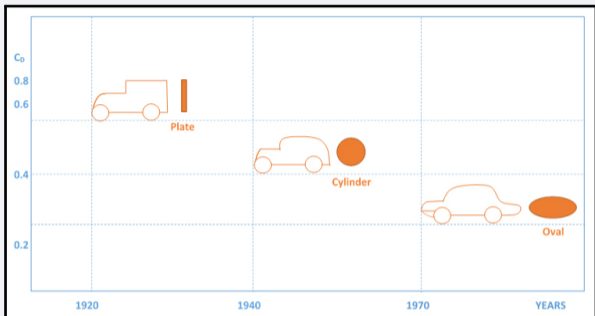
- ▶ Siła, która tłumí ruch ciała w danym órodku, gdzie ten ruch zachodzi,
  - wynik zderzenia z cząsteczkami órodku.
- Ogólnie opisywany wyrażeniem  $\vec{F}_{op} = -C_x \cdot \vec{V}$ ,
  - $\vec{V}$  oznacza wektor chwilowej prędkości ciała,
  - znak minus mówi o zwrocie przeciwnym do kierunku ruchu,
  - $C_x$  to tak zwany współczynnik oporu powietrza.
- Wartość  $C_x$  określa się doświadczalnie, np. w tunelu aerodynamicznym,
  - zależy od kształtu obiektu oraz (gładkości) jego powierzchni,
  - może być wielkością skalarną lub macierzową.



# Przykładowe wartości oporu powietrza

Shape	Drag Coefficient
Sphere → 	0.47
Halfsphere → 	0.42
Cone → 	0.50
Cube → 	1.05
Angled Cube → 	0.80
Long Cylinder → 	0.82
Short Cylinder → 	1.15
Streamlined Body → 	0.04
Streamlined Halfbody → 	0.09

Measured Drag Coefficients



« Pac Car, 2002,  $C_x \approx 0,075$

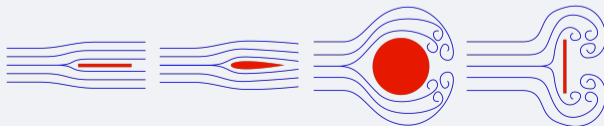
Źródło: [https://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient)

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Współczynnik\\_oporu\\_aerodynamicznego](https://pl.wikipedia.org/wiki/Współczynnik_oporu_aerodynamicznego)

<https://phys.org/news/2005-06-vehicle-highest-fuel-efficiency-world.html>

# Opór cieczy

- ▶ Zasadniczo to samo, co opór powietrza, ale dla mniej rzadkiego ośrodka.
- Dla stosunkowo małych prędkości obiektu,
  - ▶  $\vec{F}_{oc} = -C_D \cdot \vec{V}$ ,
  - symuluje to tak zwany przepływ laminarny.
- W przypadku, kiedy obiekt porusza się szybko,
  - ▶  $\vec{F}_{oc} = -C_D \cdot \vec{V}^2$ ,
  - mamy do czynienia z tak zwanym przepływem turbulentnym.
- Współczynnik  $C_D$  zależy między innymi od gęstości i lepkości cieczy.



# Wiatr / prądy powietrza / strumień cieczy

- ▶ Zasadniczo bardzo podobne do wpływu analogicznych oporów ruchu.
- Poruszające się cząsteczki ośrodka wprawiają w ruch dany obiekt,
  - mogą one rozpędzać, lub hamować poruszający się obiekt,
  - w szczególnym przypadku dojdzie do zakrzywienia toru ruchu.
- Np. w przypadku powietrza –  $\vec{F}_{pp} = C_x \cdot \vec{V}_{pp}$ .
  - $\vec{V}_{pp}$  oznacza prędkość i kierunek wiatru.

To wszystko na dziś.

Do zobaczenia!