Animacje i symulacje zjawisk, obiektów i systemów

Wykład nr 7

Modelowanie ruchu

Szymon Datko

szymon.datko@pwr.edu.pl

Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

semestr zimowy 2021/2022

Politechnika Wrocławska

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Ruch w sensie fizycznym

- położenie obiektu w chwili $\boldsymbol{t}$ opisujemy jako funkcję $\vec{r}(t)$:
  - wektor $\vec{r}$ określa współrzędne przestrzenne obiektu,
  - t jest parametrem funkcji, intuicyjnie może być to *czas*,
  - parametrów funkcji może być oczywiście więcej;
- zmiana położenia w czasie:

  $=$ zmiana t,

  $=$ zmiana $\vec{r}(t)$,

  $=$ przemieszczenie obiektu,

  $=$ czyli ruch – to co nas interesuje.

Politechnika Wrocławska

Prędkość i przyspieszenie

- prędkość:
  - określa szybkość zmian położenia, $\sim \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}$, $t_2 - t_1 = \Delta t$,
  - ogółem $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$;
- przyspieszenie:
  - opisuje jak zmienia się prędkość,
  - z definicji $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$;
- rzadziej rozważane wielkości:
  - zryw, $\vec{z}(t) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{d^3\vec{r}(t)}{dt^3}$,
  - udar, $\vec{u}(t) = \frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{a}(t)}{dt^2} = \frac{d^3\vec{V}(t)}{dt^3} = \frac{d^4\vec{r}(t)}{dt^4}$.

Równanie ruchu

- ogólnie mówimy o dowolnym wyrażeniu, definiującym $\vec{r}(t)$,
- czyli nie musi ono odpowiadać czemuś rzeczywistemu,
- w naszym przypadku, interesuje nas fizyczna podstawa:
  - punkt wyjścia to *Zasady Dynamiki Newtona*,
  - konkretnie $\vec{F}_{II} = m \cdot \vec{a}(t)$,
  - siła $\vec{F}_{II}$ oraz warunki początkowe są tym, co determinuje ruch,
  - w funkcji $\vec{a}(t)$ ukryta jest (druga pochodna) zależność $\vec{r}(t)$;
- ostatecznie, nasze równanie ruchu: $\vec{F}_{II} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

Przykład – ruch w polu grawitacyjnym

- rozważmy uproszczony, jednowymiarowy spadek swobodny:
- jedyną siłą w układzie jest siła ciężaru,
- ta siła steruje ruchem, czyli $F_{II} = F_{ciężaru}$,
- stąd równanie ruchu $m \cdot \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = m \cdot g$,
- w uproszczeniu $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = g$,
- uzyskujemy tak zwane **równanie różniczkowe zwyczajne**.

Politechnika Wrocławska

Przykład – rozwiązywanie równania ruchu (1/3)

- mamy równanie różniczkowe rzędu drugiego $\frac{d^2r(t)}{dt^2} = g$,
- zapisujemy je jako układ równań rzędu pierwszego:
  - wiemy, że $\frac{d^2r(t)}{dt^2} = \frac{dV(t)}{dt}$ oraz $\frac{dr(t)}{dt} = V(t)$,
  - stąd otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = g \\ \frac{dr(t)}{dt} = V(t) \end{cases},$$

- następnie dokonujemy przemnożenia wyrażeń przez czynnik dt

$$\begin{cases} dV(t) = g\ dt \\ dr(t) = V(t)\ dt \end{cases},$$

Przykład – rozwiązywanie równania ruchu (2/3)

- dzięki temu można scałkować wszystkie równania obustronnie

$$\begin{cases} \int dV(t) = \int g\ dt \\ \int dr(t) = \int V(t)\ dt \end{cases} ,$$

- lewa część tych równań ma trywialne rozwiązanie w postaci

$$\int dx = x + C ,$$

- więc ostatecznie otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} V(t) = \int g\ dt \\ r(t) = \int V(t)\ dt \end{cases} ,$$

Przykład – rozwiązywanie równania ruchu (3/3)

- rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$V(t) = \int g\ dt = g \cdot \int dt = g \cdot t + V_0\ ;$$

- rozwiązujemy drugie równanie, wykorzystując uzyskany wynik:

$$\begin{aligned} r(t) &= \int V(t)\ dt = \int (g \cdot t + V_0)\, dt = \int g \cdot t\ dt + \int V_0\ dt \\ &= g \cdot \int t\ dt + V_0 \int dt = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot t + r_0\ ; \end{aligned}$$

- ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} V(t) = g \cdot t \ + \ V_0 \\ r(t) = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \ + \ V_0 \cdot t \ + \ r_0 \end{cases} .$$

Gdzie się podziały stałe całkowania?!

- mamy do czynienia z równaniami w postaci ogólnej:

$$\int df(x) = \int dg(y)$$

$$f(x) + C_x = g(y) + C_y$$

$$f(x) = g(y) + (C_y - C_x)$$

$$f(x) = g(y) + C_0 \;;$$

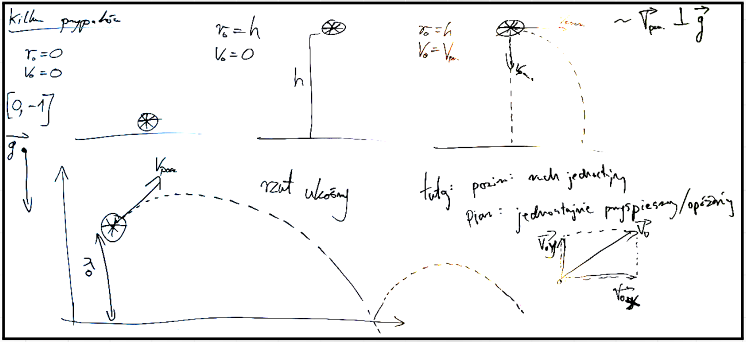
- jest tu więc zastosowany prosty zabieg matematyczny,
- wartości V_0 i r_0 stanowią dodatkowe parametry układu:
  - V_0 oznacza **prędkość początkową** obiektu,
  - r_0 określa **położenie początkowe** obiektu.

Co nam to daje?

- wartości funkcji $r(t)$ dla kolejnych wartości parametru t:
  - opisują położenie ciała w kolejnych chwilach,
  - wartość t może stanowić moment w animacji,
  - wynik $r(t)$ to wartość translacji obiektu w układzie świata;
- rozwiązanie można uogólnić na przypadek wielowymiarowy,
  - wystarczy, że wszystkie parametry (poza t) będą wektorami,
  - tj. $g \to \vec{g}$, $V_0 \to \vec{V}_0$, $r_0 \to \vec{r}_0$, $V(t) \to \vec{V}(t)$, $r(t) \to \vec{r}(t)$,
- wartości parametrów początkowych określają charakter ruchu,
- warto przy tym określić kryterium zakończenia obliczeń.

Kilka przypadków

- Różny tor ruchu, w zależności od parametrów początkowych:
  - brak / spoczynek,
  - spadek swobodny,
  - rzut poziomy,
  - rzut ukośny.



Nie zawsze bywa tak pięknie...

- rozważany przykład miał eleganckie rozwiązanie analityczne,
- siły sterujące ruchem mogą mieć skomplikowane zależności,
- w szczególności – może nie istnieć rozwiązanie analityczne,
- w takim wypadku konieczne jest użycie metod numerycznych,
- patrz przykład: rzut z uwzględnieniem oporu powietrza.

Rzut z uwzględnieniem oporu powietrza

- rozważmy zagadnienie rzutu ukośnego w ośrodku, np. strzał z armaty,
- opisanie ruchu ciała z uwzględnieniem oporu powietrza nie jest proste,
- równanie ruchu w przypadku 2-wymiarowym można opisać jako układ

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -F_{powietrza}, \qquad m \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -F_{grawitacji} - F_{powietrza};$$

- znak **minus** mówi o tym, że obie siły są skierowane domyślnie przeciwnie do kierunku ruchu; siła grawitacji działa wyłącznie w kierunku $y(t)$,

$$F_{grawitacji} = m \cdot g, \qquad F_{powietrza} = k \cdot V(t);$$

- ostatecznie całość można opisać jako układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dV_x(t)}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot V_x(t), \\ \frac{dx(t)}{dt} = V_x(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dV_y(t)}{dt} = -g - \frac{k}{m} \cdot V_y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = V_y(t); \end{cases}$$

Metoda Eulera rozwiązywania równań różniczkowych

- powtórzenie – najważniejsze informacje na temat równań:
  - rozwiązaniem klasycznego równania jest liczba, np. $x = 7$,
  - rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja, np. $f(t) = 3t^2$;
- czasem odnalezienie postaci analitycznej funkcji może nie być trywialne,
- formalna definicja pochodnej funkcji w punkcie t to

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt},$$

stąd, przekształcając wzór, możemy wyznaczyć wartość w punkcie $t + dt$

$$f(t+dt) = f(t) + \frac{df(t)}{dt} \cdot dt;$$

- jeśli określone zostaną parametry początkowe t_0 i $f(t_0)$, krok dt oraz postać pochodnej $\frac{df(t)}{dt}$ to możliwe jest wyznaczenie kolejnych wartości funkcji $f(t)$, a więc – numeryczne rozwiązane równania różniczkowego.

Rzut z uwzględnieniem oporu powietrza – rozwiązanie

– wykorzystujemy Metodę Eulera do obliczenia $V_x(t)$, $V_y(t)$, $x(t)$ i $y(t)$,

$$f(t+dt) = f(t) + \frac{df(t)}{dt} \cdot dt;$$

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x(t)}{dt} = -\dfrac{k}{m} \cdot V_x(t), \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = V_x(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dV_y(t)}{dt} = -g - \dfrac{k}{m} \cdot V_y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = V_y(t); \end{cases}$$

– w pętli należy wyznaczać kolejne wartości położeń i prędkości:

$$\begin{aligned} V_x(t+\Delta t) &= V_x(t) - \tfrac{k}{m} \cdot V_x(t) \cdot \Delta t, \\ V_y(t+\Delta t) &= V_y(t) - g \cdot \Delta t - \tfrac{k}{m} \cdot V_y(t) \cdot \Delta t, \\ x(t+\Delta t) &= x(t) + V_x(t) \cdot \Delta t - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{k}{m} \cdot V_x(t) \cdot \Delta t^2, \\ y(t+\Delta t) &= y(t) + V_y(t) \cdot \Delta t - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{k}{m} \cdot V_y(t) \cdot \Delta t^2; \end{aligned}$$

– danymi początkowymi i parametrami w tym modelu są wielkości:

- $x(t=0)$, $y(t=0)$, $V_x(t=0)$, $V_y(t=0)$, Δt, g, k, m.

Politechnika Wrocławska

To wszystko na dziś.

Do zobaczenia za tydzień!