Politechnika Wrocławska

Animacje i symulacje zjawisk, obiektów i systemów

Wykład nr 4

Matematyczne fundamenty grafiki komputerowej

Szymon Datko

szymon.datko@pwr.edu.pl

Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska

semestr zimowy 2021/2022

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Współrzędne jednorodne

- Podstawowym pojęciem w grafice komputerowej **wierzchołek**. Jest to punkt z określonym położeniem w przestrzeni 3D.

- W **reprezentacji jednorodnej** do zapisu położenia stosuje się wektory o liczbie elementów większej niż wymiar przestrzeni,

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w} \right).$$

- Typowo ostatnia składowa w dla położenia ma wartość 1.

- Zastosowanie takiej reprezentacji pozwala na bardzo łatwą realizację podstawowych przekształceń geometrycznych.

ang. *homogeneous coordinates* – August Möbius, „Der barycentrische Calcül”, 1827.

Wektory

- Obiekty matematyczne, charakteryzowane przez dwie wartości:
  - **kierunek** (wraz ze zwrotem),
  - **moduł** (długość / wielkość).
- Typowa notacja: $\vec{v}$ lub $\mathbf{v}$; najważniejsze informacje:
  - najczęściej zapisywane są jako tablice liczb,
  - elementy wektora są nazywane **składowymi**,
  - wektor **jednostkowy** / znormalizowany – gdy długość równa 1,
    - najczęściej stosowany po prostu do wskazania kierunku.
- Podstawowe operacje:
  - dodawanie: $(a_1, a_2, ...) + (b_1, b_2, ...) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ ...)$;
  - skalowanie: $a \cdot (b_1, b_2, ...) = (a \cdot b_1,\ a \cdot b_2,\ ...)$.

Politechnika Wrocławska

Własności wektorów

- Równość:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_1 = b_1 \ \land \ a_2 = b_2 \ \land \ \dots$$

- Przemienność i łączność:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

- Moduł / norma / długość:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots}$$

Typowe operacje na wektorach

- Iloczyn skalarny:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots$$
$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \alpha$$

- Iloczyn wektorowy:

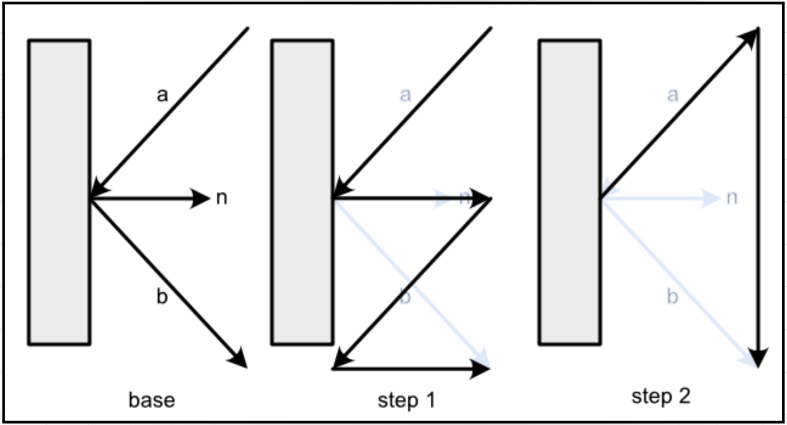
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \theta \cdot \widehat{\mathbf{n}},$$
$$\|\widehat{\mathbf{n}}\| = 1, \ \widehat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{a}, \ \widehat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{b}$$

- Odbicie względem wektora normalnego:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - 2 \cdot (\mathbf{a} \circ \widehat{\mathbf{n}}) \cdot \widehat{\mathbf{n}}$$

Politechnika Wrocławska

Wyprowadzenie wzoru na wektor odbity



Źródło: https://math.stackexchange.com/questions/13261/how-to-get-a-reflection-vector

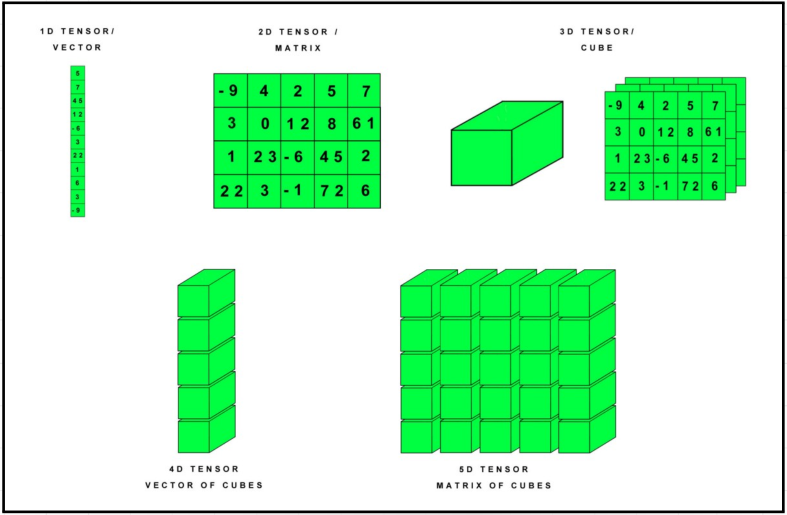
Macierze

- Obiekty matematyczne, 2-wymiarowe tablice liczb.
  - Dwa indeksy każdego elementu: nr wiersza i nr kolumny.
- Podstawowe operacje:
  - dodawanie: $(a_{11}, a_{12}, \ldots) + (b_{11}, b_{12}, \ldots) = (a_{11} + b_{11},\ a_{12} + b_{12},\ \ldots)$;
  - skalowanie: $a \cdot (b_{11}, b_{12}, \ldots) = (a \cdot b_{11},\ a \cdot b_{12},\ \ldots)$;
  - mnożenie: (iloczyn Cauchy'ego) $\mathbf{A_{m \times n}} \cdot \mathbf{B_{n \times p}} = \mathbf{C_{m \times p}}$.
- Najważniejsze własności:
  - łączność,
  - **nie**przemienność.
- Wektor można uznać jako macierz o wymiarze $1 \times n$ lub $n \times 1$...
  - Mówimy wtedy o wektorze wierszowym lub kolumnowym.
  - Ma to znaczenie dla operacji mnożenia macierzy i wektora.

Politechnika Wrocławska

Tensory

Uogólnienie pojęcia wektora. Skalar to inaczej tensor rzędu 0, itd.



Źródło: https://petrospsyllos.com/pl/prezentacje/blog/565-algebra-liniowa-cz-1-skalary-wektory-macierze-i-tensory

Podstawowe rodzaje przekształceń

- Afiniczne[1]:
  - identyczność,
  - skalowanie,
  - translacja,
  - obrót.
- Nieafiniczne:
  - rzutowanie ortogonalne,
  - rzutowanie perspektywiczne.

[1] czyli takie, które zachowują (w ogólności) proprorcje odległości między punktami na tej samej linii przed i po wykonaniu transformacji, ale nie muszą zachować położenia punktu początkowego; może być zareprezentowane jako iloczyn macierzy $n \times n$ i wektora $n \times 1$ z dodatkowym przesunięciem o wektor; n - wymiar przestrzeni.

Politechnika Wrocławska

Macierz przekształceń – identyczność

Macierz $\mathbf{I}$ jest także nazywana macierzą jednostkową.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Z reguły jest to domyślna macierz, od której rozpoczynamy dalsze obliczenia.

- Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1.0 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształceń – skalowanie

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & S_y & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & S_z & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- Gdy $S_x = S_y = S_z$ to mówimy o skalowaniu jednorodnym.
- Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & S_y & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & S_z & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \cdot x & S_y \cdot y & S_z \cdot z & 1.0 \end{bmatrix}$$

Politechnika Wrocławska

Macierz przekształceń – translacja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & T_x \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & T_y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & T_z \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- Reprezentacja jednorodna punktu pozwala wyrazić operację przez macierz.
- Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & T_x \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & T_y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & T_z \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x & y + T_y & z + T_z & 1.0 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształceń – obrót wokół osi x

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x},\gamma} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0.0 \\ 0.0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

- Współrzędne w osi wokół której następuje obrót nie ulegają zmianie!
- Przykład obliczeń:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0.0 \\ 0.0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -z & y & 1.0 \end{bmatrix}$$

Politechnika Wrocławska

Macierz przekształceń – obrót wokół osi y i z

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y},\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0.0 & \sin\theta & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -\sin\theta & 0.0 & \cos\theta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z},\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0.0 & 0.0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Uwaga!

W zależności od przyjętej definicji układu współrzędnych i kierunku obrotu, wyrazy w przedstawionej macierzy mogą się różnić co do znaku $+/-$.

Politechnika Wrocławska

Macierz przekształceń – obrót wokół osi x, y i z

Dokonujemy kolejno obrotów wokół osi x, y i z o kąty γ, θ i ϕ.

Należy przemnożyć w odwrotnej kolejności wcześniej macierze.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z},\phi}\mathbf{R}_{\mathbf{y},\theta}\mathbf{R}_{\mathbf{x},\gamma} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\gamma\sin\phi+\sin\gamma\sin\theta\cos\phi & \sin\gamma\sin\phi-\cos\gamma\sin\theta\cos\phi & 0.0 \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\gamma\cos\phi-\sin\gamma\sin\theta\sin\phi & \sin\gamma\cos\phi+\cos\gamma\sin\theta\sin\phi & 0.0 \\ \sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta & \cos\gamma\cos\theta & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Uwaga!

Kolejność wykonywania obrotów ma znaczenie!

Macierz przekształceń – obrót wokół wektora

Obrót o kąt skierowany ϕ (reguła prawej dłoni) wokół wektora $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{v}\| = 1$$

$$\begin{bmatrix} v_x^2(1-\cos\phi)+\cos\phi & v_x v_y(1-\cos\phi) - v_z\sin\phi & v_x v_z(1-\cos\phi) + v_y\sin\phi & 0.0 \\ v_x v_y(1-\cos\phi) + v_z\sin\phi & v_y^2(1-\cos\phi)+\cos\phi & v_y v_z(1-\cos\phi) - v_x\sin\phi & 0.0 \\ v_x v_z(1-\cos\phi) - v_y\sin\phi & v_y v_z(1-\cos\phi) + v_x\sin\phi & v_z^2(1-\cos\phi)+\cos\phi & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Lewa górna część (3x3) powyższej macierzy może zostać wyrażona w prostszy sposób:

$$\mathbf{v}\,\mathbf{v}^\mathbf{T}\,(1-\cos\phi) \;+\; \mathbf{I}\cos\phi \;+\; \begin{bmatrix} 0.0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0.0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0.0 \end{bmatrix} \sin\phi$$

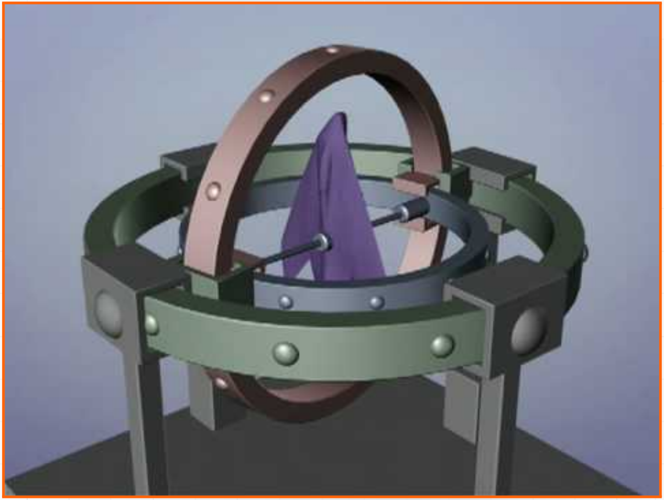
Uwaga!

Wektor $\mathbf{v}$ określa oś obrotu, przechodzącą przez początek układu współrzędnych!

Problem z macierzami obrotu

- W układzie z ustalonymi osiami występuje tak zwana **blokada przegubu**.

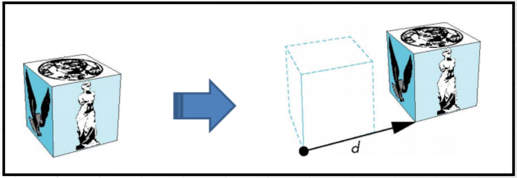
"Euler (gimbal lock) Explained" – GuerrillaCG, 2009.

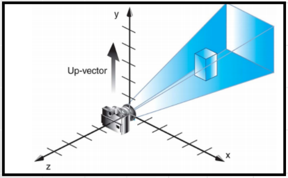


https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno

Kamera jest kłamstwem

- Przedstawione transformacje pozwalają nam na skomponowanie sceny.
  - Można dzięki nim określić rozmieszczenie wszystkich obiektów.
  - Pozostaje określić na co na tej scenie patrzymy – opisać kamerę...
- W kontekście karty graficznej nie istnieje coś takiego jak **kamera**!
- Karta graficzna renderuje zawsze dla tego samego fragmentu przestrzeni.
  - Obszar rysowania obejmuje zakres [-1.0; 1.0] dla każdej z osi.
  - Jest to tak zwana **bryła widzenia**.
- Abstrakcja z kamerą na scenie stanowi intuicyjnie wygodny dla nas opis...
  - Wykorzystujemy **względność ruchu**, aby tę reprezentację osiągnąć!





Źródła obrazów: https://vitaminac.github.io/Matrices-in-Computer-Graphics/

Macierz patrzenia

Chcemy opisać położenie kamery jednoznacznie w przestrzeni:

- współrzędne położenia kamery $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$,
- współrzędne punktu zainteresowania $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$,
- wektor orientacji, wskazujący górę dla kamery $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Kierunek patrzenia można opisać wektorem $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{e}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{e}\|}$; $\mathbf{s} = (\mathbf{f} \times \mathbf{u})$.

Rzut wektora **u** na płaszczyznę prostopadłą do **f** to $\mathbf{u}' = (\mathbf{f} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{f}$.

$$\mathbf{V}_{\mathbf{lookAt}} = \begin{bmatrix} s_x & u'_x & f_x & -e_x \\ s_y & u'_y & f_y & -e_y \\ s_z & u'_z & f_z & -e_z \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Oznaczenia: s – side vector, u – up vector, f – forward vector, e – eye position.

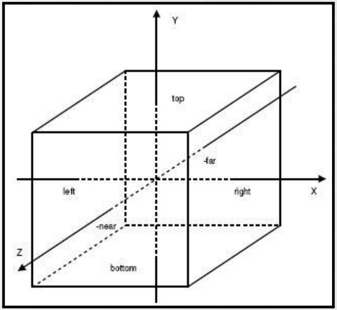
Efektywnie: przekształcamy cały świat przeciwnie do ruchu, jaki wykonałaby kamera.

Więcej: https://www.khronos.org/registry/OpenGL-Refpages/gl2.1/xhtml/gluLookAt.xml

Macierz rzutowania prostopadłego

$$\mathbf{P}_{\mathbf{ortho}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{right - left} & 0.0 & 0.0 & -\frac{right+left}{right-left} \\ 0.0 & \frac{2}{top-bottom} & 0.0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0.0 & 0.0 & -\frac{2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

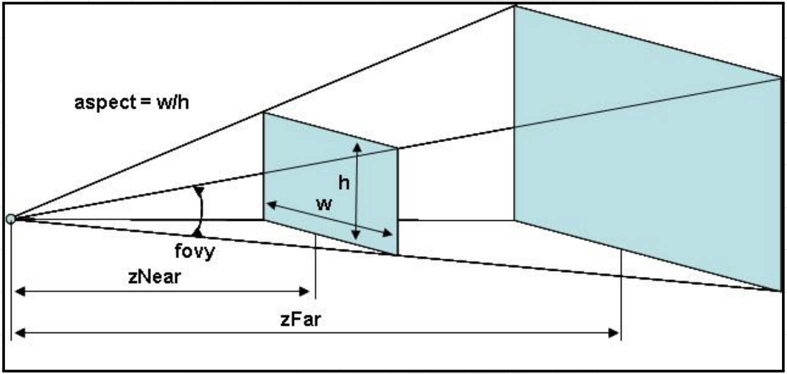
Macierz nie opisuje wprost przekształcenia nieafinicznego, a bryłę widzenia!



Efektywnie: skalujemy fragment świata, który chcemy zobaczyć, do obszaru rysowania.

Źródło: http://cpp0x.pl/kursy/Kurs-OpenGL-C++/Definiowanie-sceny-3D/104

Rzutowanie perspektywiczne



Obszar pomiędzy `zNear` a `zFar` to bryła widzenia.

Przy rzutowaniu perspektywicznym to tak zwany stożek ścięty (ang. *frustum*).

Pozwala nam zaobserwować głębię (odległość od kamery) na obrazie.

Obiekty bliżej płaszczyzny bliskiej są mniej zmniejszone, niż te przy p. dalekiej.

Źródło: http://www.zsk.ict.pwr.wroc.pl/zsk/dyd/intinz/gk/lab/cw_4_dz/

Macierz rzutowania perspektywicznego

$$\mathbf{P}_{\mathbf{frustum}} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot near}{right - left} & 0.0 & \frac{right + left}{right - left} & 0.0 \\ 0.0 & \frac{2 \cdot near}{top - bottom} & \frac{top + bottom}{top - bottom} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2 \cdot far \cdot near}{far - near} \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

W szczególności to przekształcenie może być zadane przez:

- pole widzenia jako kąt *fovy*,
- współczynnik proporcji obrazu $aspect = \frac{width}{height}$,
- odległość bliższej *near* i dalszej *far* przestrzeni przycięcia;
- wtedy obliczamy:
  - $top = near * \tan(fovy \cdot \frac{\pi}{360})$,
  - $bottom = -top$,
  - $right = top * aspect$,
  - $left = -right$.

Składanie przekształceń

- Chcąc przekształcić wektor, mnożymy go lewostronnie przez macierz.
- Wynikiem takiej operacji jest nowy wektor, który też można przekształcić.
- Macierze można wymnożyć najpierw – często przyspiesza to obliczenia.
- Mnożenie macierzy nie jest przemienne, a więc **kolejność ma znaczenie**.

$$\vec{p}_{wynik} = \ldots \cdot \mathbf{M}_{czwarta} \cdot \mathbf{M}_{trzecia} \cdot \mathbf{M}_{druga} \cdot \mathbf{M}_{pierwsza} \cdot \vec{p}_{\text{wierzchołka}}$$

$$\vec{p}_{wynik} = \ldots \cdot (\mathbf{M}_{czwarta} \cdot (\mathbf{M}_{trzecia} \cdot (\mathbf{M}_{druga} \cdot (\mathbf{M}_{pierwsza} \cdot \vec{p}_{\text{wierzchołka}}))))$$

$$\vec{p}_{wynik} = (\ldots \cdot \mathbf{M}_{czwarta} \cdot \mathbf{M}_{trzecia} \cdot \mathbf{M}_{druga} \cdot \mathbf{M}_{pierwsza}) \cdot \vec{p}_{\text{wierzchołka}}$$

Układ Model-View-Projection

Zazwyczaj ostateczne położenie każdego wierzchołka na scenie jest opisane przez serię trzech kolejnych przekształceń, czyli przez przemnożenie jego współrzędnych wejściowych przez iloczyn $P \cdot V \cdot M$, gdzie:

- macierz **M** – przekształcenie modelu:
  - opisuje ułożenie modelowanego obiektu na scenie;
- macierz **V** – przekształcenie patrzenia:
  - definiuje położenie hipotetycznej kamery w przestrzeni;
- macierz **P** – przekształcenie rzutowania:
  - określa jaki zakres (fragment) przestrzeni będzie rysowany;

Taki układ wygodnie reprezentuje niezależnie przemieszczenie obiektu i kamery!

Politechnika Wrocławska

To wszystko na dziś.

Do zobaczenia za tydzień!